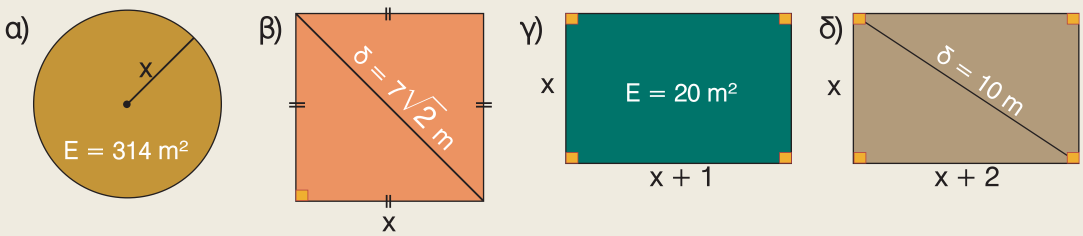
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



2 Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.

β) Το γινόμενό του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.

γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

3 Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του. (1 λίτρο = 1dm^3)

4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2. Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

5 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

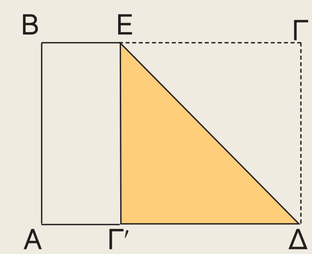
6 Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «*Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικρυστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506*». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

7 Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

8 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x.

9 Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε:
«Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό».
Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

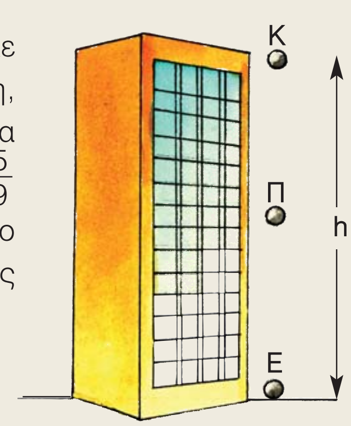
10 Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα $\frac{3}{8}$ του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό συντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το συντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του συντριβανιού.

12 Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν 251,2 m^2 λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

13 Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησής του διήνυσε μια απόσταση ΠΕ ίση με τα $\frac{5}{9}$ του ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε πόσο χρόνο διήρκησε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10$ m/sec^2).



2.4 Κλασματικές εξισώσεις

✔ *Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x + 2$, x, $x^2 + 2x$ και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}.$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6},$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.
Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x + 2 \neq 0$
δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$x(x+2)\frac{x}{x+2} + x(x+2)\frac{4}{x} = x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$x^2 + 4(x + 2) = x + 8$

$x^2 + 4x + 8 = x + 8$ ή $x^2 + 3x = 0$ ή

$x(x + 3) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x = -3$.

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{8}{x} = 1$ β) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x^2-2x}$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1)\cdot\frac{x}{x+1} - x(x+1)\cdot\frac{8}{x} = x(x+1)\cdot 1$$

$x^2 - 8(x + 1) = x(x + 1)$ ή $x^2 - 8x - 8 = x^2 + x$ ή $-9x = 8$ ή $x = -\dfrac{8}{9}$ (ικανοποιεί τους περιορισμούς). Άρα η εξίσωση έχει λύση την $x = -\dfrac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$ (1).

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - 2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x-2)\frac{1}{x-2} - x(x-2)\frac{1}{x} = x(x-2)\frac{2}{x(x-2)}$$

$x - (x - 2) = 2$ ή $x - x = 2 - 2$ ή $0x = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2 **Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;**

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή (x + 1) km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x+1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση $\frac{42}{x} = \frac{42}{x+1} + \frac{1}{10}$ (1).

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $10x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$10x(x+1) \cdot \frac{42}{x} = 10x(x+1) \cdot \frac{42}{x+1} + 10x(x+1) \cdot \frac{1}{10}$$

$420(x + 1) = 420x + x(x + 1)$ ή $420x + 420 = 420x + x^2 + x$ ή $x^2 + x - 420 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681 > 0$.

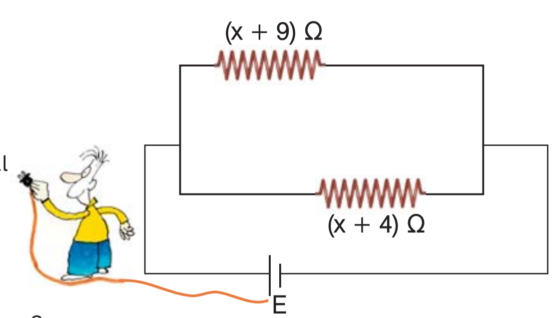
Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 41}{2}$,

δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

3 **Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.**

Σημείωση: *Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1, R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται από τον τύπο* $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.



Λύση

Αν η ολική αντίσταση είναι x Ω, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι (x + 4) Ω και (x + 9) Ω.

Άρα ισχύει $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$ (1)

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x + 4)(x + 9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+4} + x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+9} = x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x}$$

$x(x + 9) + x(x + 4) = (x + 4)(x + 9)$ ή $x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36$ ή $x^2 = 36$ ή $x = \pm\sqrt{36}$. Άρα $x = 6$ ή $x = -6$.

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6 Ω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$. ☐

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$. ☐

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$, τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$. ☐

δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της. ☐

2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;

α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$ γ) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$

3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό

α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$ γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ) $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$ ε) $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$ στ) $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$ β) $\frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$ γ) $\frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$

δ) $\frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1$ ε) $\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$ στ) $\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$ β) $\frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$

γ) $\frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$ δ) $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0$ β) $\frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$

γ) $\frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$ δ) $1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$ β) $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$

6 Να λύσετε τους τύπους:

α) $p = \frac{m}{V}$ ως προς V β) $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ως προς R

γ) $R = \rho\frac{\ell}{S}$ ως προς S δ) $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ ως προς T_1

ε) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R στ) $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ως προς α

ζ) $\frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ως προς u_α^2 η) $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ως προς λ

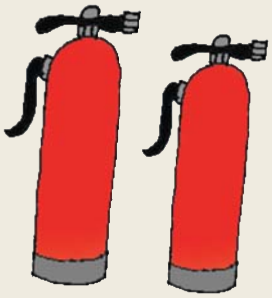
7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;

9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm^3 ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm^3 μικρότερη.

11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας.

12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

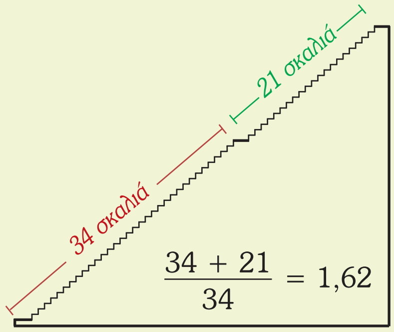
α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\dfrac{34+21}{34}$ και $\dfrac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;

Το προβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΤ και ΤΒ, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».



β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\dfrac{λ}{x} = \dfrac{x}{λ - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $φ = \dfrac{λ}{x}$ είναι ίσος με $φ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618...$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ, λέγεται **«χρυσό ορθογώνιο»** και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.

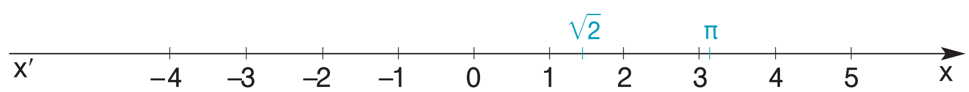
Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\dfrac{α}{β} = φ$

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

- ✔ *Θυμάμαι πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.*
- ✔ *Μαθαίνω να αποδεικνύω και να χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της διάταξης.*
- ✔ *Θυμάμαι πώς λύνονται οι ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.*

A Διάταξη πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο ενός άξονα. Αν στον άξονα έχουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα π.χ. $-2 > -4$, $-3 < 2$, $\pi > \sqrt{2}$.



Δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί που έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα είναι **διατεταγμένοι**, οπότε μπορούμε να τους συγκρίνουμε.
Επομένως:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Πώς όμως θα συγκρίνουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός αξόνα;
Αν πάρουμε δύο αριθμούς. π.χ. τους 5 και 3, για τους οποίους ισχύει $5 > 3$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $5 - 3 = 2 > 0$.

Ομοίως, οι αριθμοί -2 και -4, για τους οποίους ισχύει $-2 > -4$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $(-2) - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0$.

Αντίθετα, οι αριθμοί 3 και 5 ή -4 και -2, για τους οποίους ισχύει $3 < 5$ και $-4 < -2$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν αρνητικό αριθμό, αφού $3 - 5 = -2 < 0$ και $(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2 < 0$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ ενώ **Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$**

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

Β Ιδιότητες της διάταξης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, –2, 4, –5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3

2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν

i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3

ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2

iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό –2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

Ο ορισμός της διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται και για την απόδειξη των ιδιοτήτων της διάταξης. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

α) **Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 + 3 > 4 + 3$ και $8 - 3 > 4 - 3$. Γενικά ισχύει:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma > \beta + \gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha - \gamma > \beta - \gamma}$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:
  $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.
  Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

β) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot 2 > 4 \cdot 2$ και $\frac{8}{2} > \frac{4}{2}$. Γενικά ισχύει:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma > \beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}}$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1).
  Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

γ) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ και $\frac{8}{-2} < \frac{4}{-2}$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma < 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma < \beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}}$

δ) **Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2$ και $7 > 4$, οπότε $3 + 7 > 2 + 4$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma > \beta + \delta}$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η **μεταβατική ιδιότητα**:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\beta > \gamma}$ τότε $\boldsymbol{\alpha > \gamma}$

Π.χ. είναι $3 > 1$ και $1 > -2{,}5$ οπότε $3 > -2{,}5$.

ε) **Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2 > 0$ και $7 > 4 > 0$, οπότε $3 \cdot 7 > 2 \cdot 4$. Γενικά ισχύει:

Αν **α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί** με $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma > \beta\delta}$

Απόδειξη

Είναι $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (1)

Είναι $\gamma > \delta$ και $\beta > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $\beta\gamma > \beta\delta$ (2)

Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Παρατηρήσεις:

1) Υπενθυμίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2) Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε

καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Γ Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Οι ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

$$x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. = 4 > 0, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, *ιδιότητα β*),

$$4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x+1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$4x - 2(3x + 1) > 3$$

Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις

$$4x - 6x - 2 > 3$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, *ιδιότητα α*).

$$4x - 6x > 3 + 2$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$-2x > 5$$

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι –2 < 0 και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, *ιδιότητα γ*).

$$x < -\frac{5}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $\alpha > 4$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;**
α) $-3\alpha + 2 < -10$ β) $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$ γ) $-2(\alpha + 2) < -12$

Λύση

α)
$\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με –3)
$-3\alpha < -12$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 2)
$-3\alpha + 2 < -12 + 2$
$-3\alpha + 2 < -10$

β) $\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με $\frac{5}{4}$)

$\frac{5}{4} \cdot \alpha > \frac{5}{4} \cdot 4$

$\frac{5\alpha}{4} > 5$ (αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της ανίσωσης το 1)

$\frac{5\alpha}{4} - 1 > 5 - 1$, οπότε $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$

γ) $\alpha > 4$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανίσωσης το 2)

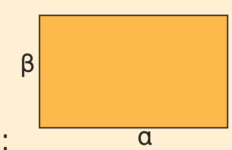
$\alpha + 2 > 4 + 2$

$\alpha + 2 > 6$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το –2)

$-2(\alpha + 2) < -2 \cdot 6$

$-2(\alpha + 2) < -12$

2 **Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν**
$4 \leq \alpha \leq 6$ και $2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5$.
Ποιες τιμές μπορεί να πάρει
α) η περίμετρος του ορθογωνίου; β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2\beta$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των ανισοτήτων $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ με το 2, οπότε έχουμε $\begin{cases} 8 \leq 2\alpha \leq 12 \\ 5 \leq 2\beta \leq 9 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και έχουμε

$8 + 5 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 12 + 9$ ή $13 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 21$ ή $13 \leq \Pi \leq 21$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι από 13 έως και 21.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\beta$. Οι ανισότητες $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $4 \cdot 2{,}5 \leq \alpha\beta \leq 6 \cdot 4{,}5$ ή $10 \leq \alpha\beta \leq 27$ ή $10 \leq E \leq 27$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι από 10 έως και 27.

3 **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδειχτεί ότι ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ ή $(x - y)^2 \geq 0$.

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Η ισότητα ισχύει όταν $(x - y)^2 = 0$, οπότε $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$.

4 Οι μαθητές μιας τάξης προκειμένου να πάνε μια εκδρομή ζήτησαν προσφορά από δύο πρακτορεία.

– Το πρώτο πρακτορείο ζήτησε 15 ευρώ για κάθε μαθητή και εφόσον οι μαθητές ήταν πάνω από 25 θα έκανε και έκπτωση 10%.
– Το δεύτερο πρακτορείο ζήτησε 12 ευρώ για κάθε μαθητή και 45 ευρώ για τα διάφορα έξοδα (διόδια, ναύλα φεριμπότ κ.τ.λ.).

Αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην εκδρομή είναι περισσότεροι από 25, ποιο πρακτορείο έκανε την καλύτερη προσφορά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι μαθητές που τελικά συμμετέχουν στην εκδρομή είναι x, όπου $x > 25$.

Στο πρώτο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $15x - \frac{10}{100}15x = 15x - \frac{3}{2}x$ ευρώ,

ενώ στο δεύτερο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $12x + 45$ ευρώ.

Για να είναι καλύτερη η προσφορά του πρώτου πρακτορείου, πρέπει να ισχύει

$$15x - \frac{3}{2}x < 12x + 45 \text{ ή } 30x - 3x - 24x < 90 \text{ ή } 3x < 90 \text{ ή } x < 30.$$

Επομένως αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 25 και λιγότεροι από 30, τότε την καλύτερη προσφορά έκανε το πρώτο πρακτορείο, ενώ αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 30, την καλύτερη προσφορά έκανε το δεύτερο πρακτορείο.

Αν οι μαθητές είναι 30, τότε οι προσφορές των δύο πρακτορείων είναι ίδιες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$. ☐
β) Αν $α > β$, τότε $-α < -β$. ☐
γ) Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$. ☐
δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$. ☐
ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$. ☐
στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$. ☐
ζ) Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$. ☐
η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>, <, \geq, \leq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $α > 3$, τότε $α - 3$ ... 0
β) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε α ... γ

γ) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β}$ ... 0 δ) Αν $γ < 0$ και $αγ \leq βγ$, τότε α ... β

ε) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2$ ... 0 στ) Αν $α \leq 0$ και $β \leq 0$, τότε $α + β$ ... 0

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;

α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;

α) $α + β > 15$ β) $α - β > 9$ γ) $αβ > 36$ δ) $\frac{α}{β} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, αρκεί να ισχύει $αδ = βγ$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{α}{β} > \frac{γ}{δ}$, αρκεί να αποδείξει ότι $αδ > βγ$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν ισχύει $3(α - β) > 2(α + β)$, τότε να αποδείξετε ότι $α > 5β$.

2 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > -6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;

α) $-5x - 30 < 0$ β) $3x + 18 > 0$ γ) $2(x + 4) > -4$

3 Αν $2 < α < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί

α) $α - 2$ β) $2α - 5$ γ) $1 - 3α$

4 Αν $α < β$, τότε να αποδείξετε ότι

α) $5α - 3 < 5β - 3$ β) $-2α + 4 > -2β + 4$ γ) $α < \frac{α + β}{2}$ δ) $\frac{α + β}{2} < β$

5 Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

α) $3 < x + y < 8$ β) $4 < 2x + y < 11$ γ) $-4 < x - y < 1$

6 Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xy > 6$ β) $(x - 2)(y - 3) > 0$ γ) $(x + 2)y > 12$

7 Αν α, β θετικοί αριθμοί με $α > β$, τότε να αποδείξετε ότι $α^2 > β^2$.

8 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^2 > \alpha$ β) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > 2x^2$

9 Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

10 Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 3)(y - 2) < 0$ β) $xy + 6 < 2x + 3y$

11 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + 1 \geq 2x$ β) $(x + y)^2 \geq 4xy$ γ) $x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα.

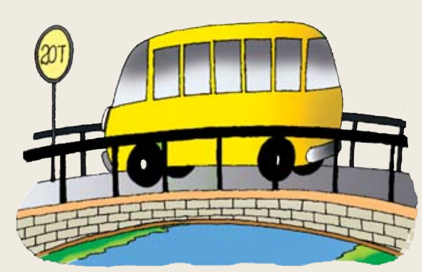
12 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$ β) Αν $x < 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \leq -2$

13 Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 114 και 135 και ο οποίος, όταν διαιρεθεί με το 15, δίνει υπόλοιπο 6.

14 Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 € και μιας μπλούζας από 22 έως 25 €. Αν κάποιος θέλει ν' αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες, τότε μεταξύ ποιων ποσών θα κυμαίνονται τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει;

15 Μ' ένα πούλμαν ταξιδεύουν 51 άτομα (ο οδηγός και 50 επιβάτες). Αν το βάρος κάθε ατόμου κυμαίνεται μεταξύ 60 kg και 100 kg, οι αποσκευές κάθε επιβάτη ζυγίζουν από 4 kg έως και 15 kg και το πούλμαν έχει απόβαρο 13,25 t, τότε να εκτιμήσετε το συνολικό βάρος του πούλμαν. Είναι δυνατόν το πούλμαν να διασχίσει μια γέφυρα επαρχιακού δρόμου που το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος διέλευσης είναι 20 t;



16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $11 - 3x < 7x + 1$ β) $2x - 9 > 5x + 6$ γ) $4(3x - 5) > 3(4x + 5)$

δ) $\frac{3 - 4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6 - x}{2}$ ε) $\frac{2x + 1}{6} - x < \frac{3 - 2x}{3}$ στ) $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x + 4}{6}$

17 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x - 1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$

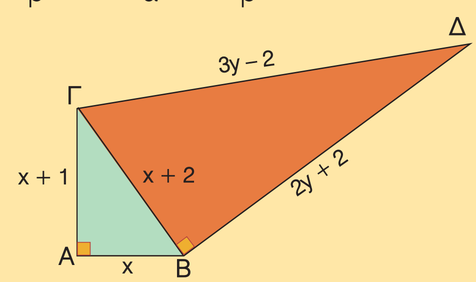
18 Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x, ώστε $\frac{x}{x + 1} < \frac{31}{40}$ και $\frac{x + 1}{x + 2} > \frac{31}{40}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$ **β)** $\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1.$

2 Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y.



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

α) $\dfrac{x}{x-\alpha} + \dfrac{2x}{x+\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ **β)** $\dfrac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \dfrac{1}{x^2+\alpha x} = \dfrac{6x}{x^2-\alpha^2}$

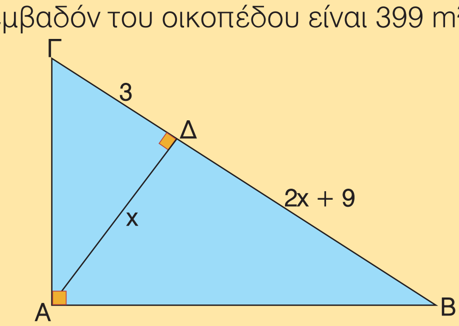
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda-5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2.

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = x, ΒΔ = 2x + 9 και ΓΔ = 3, να υπολογίσετε τον αριθμό x.



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1+\alpha)(1+\beta)$ και $1+\alpha+\beta$.

11 **α)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.
β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{\nu(\nu+2)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \frac{2}{\nu(\nu+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

14 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

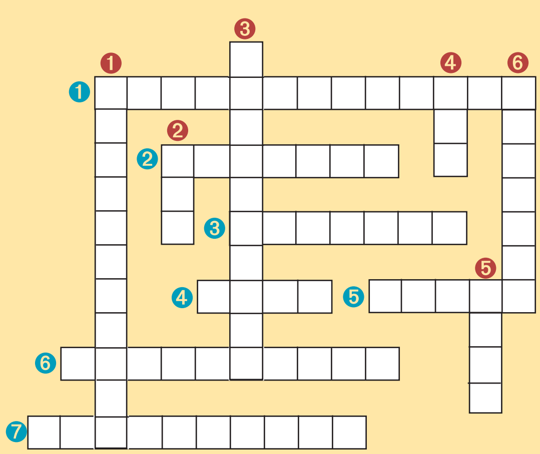
15 Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

16 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$. (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995**).

17 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη; (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001**).

18 – Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-19}{2001} + \frac{x-17}{2003} + \frac{x-15}{2005} + \frac{x-13}{2007} = 4$.
– Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται.
Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι* $\frac{x-19}{2001} = \frac{x-2020+2001}{2001} = \frac{x-2020}{2001} + 1$, *κ.τ.λ.*

19 Να λύσετε το σταυρόλεξο



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$..
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι .... της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x - 1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με .... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ
1. Το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ έχει .... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει .... λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$, π.χ. $3x + 18 = 0$
- **Λύση** ή **ρίζα** μιας εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει. Π.χ. ο αριθμός $x = -6$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 18 = 0$, αφού $3 \cdot (-6) + 18 = 0$.
- Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$			Παραδείγματα
$\alpha \neq 0$		έχει μοναδική λύση την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$	$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\dfrac{3}{4}$
$\alpha = 0$	$\beta \neq 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$0x = 2$ (αδύνατη)
	$\beta = 0$	έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)	$0x = 0$ (ταυτότητα)

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, π.χ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ με $\alpha = 2$, $\beta = -5$ και $\gamma = 3$
- Η εξίσωση $x^2 = \alpha$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$		Παραδείγματα
$\alpha > 0$	έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{\alpha}$ και $x = -\sqrt{\alpha}$	$x^2 = 2$ άρα $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$
$\alpha < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$x^2 = -4$ (αδύνατη)
$\alpha = 0$	έχει μία λύση τη $x = 0$ (διπλή)	$x^2 = 0$ άρα $x = 0$ (διπλή λύση)

- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$	
	$\Delta > 0$	έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
	$\Delta = 0$	έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
	$\Delta < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)

- Παραγοντοποίηση τριωνύμου:
  Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Κλασματική εξίσωση** ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.
- Ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρονομαστή μιας κλασματικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση (ή ρίζα) της.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Ορισμός διάταξης:
Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta$
Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε $\alpha < \beta$
Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta$

Ιδιότητες της διάταξης
- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ (Μεταβατική ιδιότητα)
- Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Παρατηρήσεις:
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.
- Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$.
- Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πώς παριστάνεται γραφικά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y, βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y.

β) Ποια από τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (–2, 7), (2, 2) (3, 0), (3, 5) επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε.

δ) Πάνω στην ευθεία ε να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση αx + βy = γ

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και η οποία είναι της μορφής αx + βy = γ.

Για παράδειγμα, η εξίσωση *2x + y = 6* είναι της μορφής αυτής, με α = 2, β = 1 και γ = 6. Παρατηρούμε ότι για x = 1 και y = 4 η εξίσωση 2x + y = 6 επαληθεύεται, αφού 2 · 1 + 4 = 6, ενώ για x = 3 και y = 5 δεν επαληθεύεται, αφού 2 · 3 + 5 = 11 ≠ 6.

Το ζεύγος των αριθμών (1, 4) που επαληθεύει την εξίσωση 2x + y = 6, λέμε ότι είναι μία **λύση** της.

Γενικά

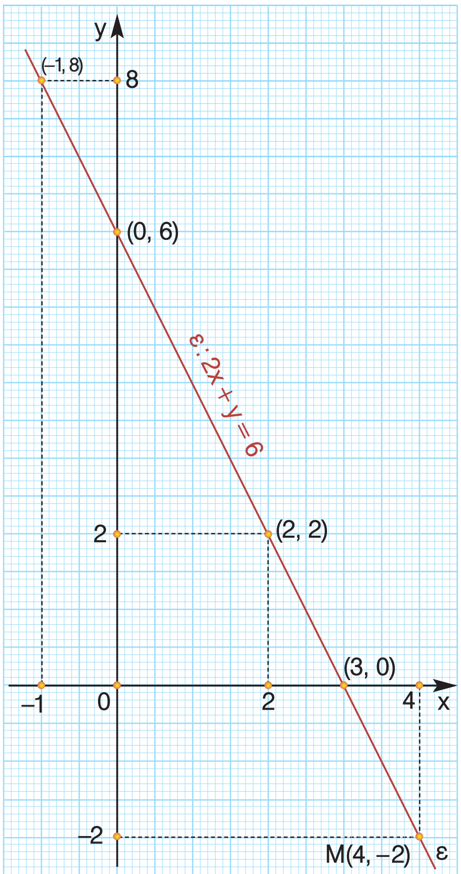
Λύση μιας εξίσωσης αx + βy = γ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Η εξίσωση όμως 2x + y = 6 δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος (1, 4), αλλά έχει **άπειρες λύσεις**. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Για x = –1 έχουμε 2 · (–1) + y = 6, οπότε y = 8.
Για x = 0 έχουμε 2 · 0 + y = 6, οπότε y = 6.
Για x = 2 έχουμε 2 · 2 + y = 6, οπότε y = 2.
Για x = 3 έχουμε 2 · 3 + y = 6, οπότε y = 0 κ.τ.λ.

x	–1	0	2	3
y	8	6	2	0

Άρα τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), ... είναι λύσεις της εξίσωσης 2x + y = 6.



Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης $2x + y = 6$, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ε.

Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, π.χ. το Μ(4, –2), παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $2x + y = 6$, αφού $2 \cdot 4 + (-2) = 6$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας ε έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $2x + y = 6$ παριστάνει την ευθεία ε και συμβολίζεται ε: $2x + y = 6$.

Γενικά

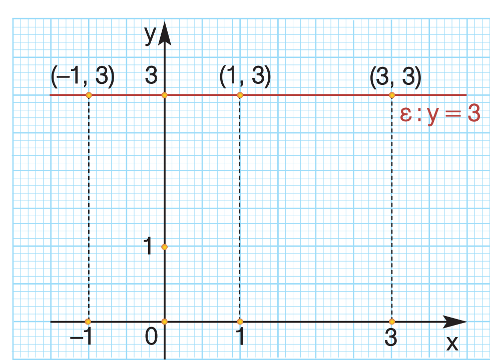
- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

Ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση y = k.

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $0x + 2y = 6$, που είναι της μορφής $αx + βy = γ$ με $α = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη (–1, 3), (1, 3), (3, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

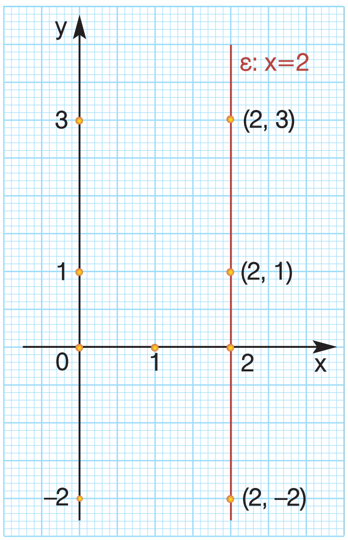


Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 3). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 3$.

Γενικά

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k), ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x΄x

Η εξίσωση x = k



Αν θεωρήσουμε την εξίσωση *3x + 0y = 6*, που είναι της μορφής αx + βy = γ με β = 0, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του y έχουμε x = 2. Για παράδειγμα, τα ζεύγη (2, –2), (2, 1), (2, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση 3x + 0y = 6 παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη x = 2 και τεταγμένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (2, 0).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση x = 2.

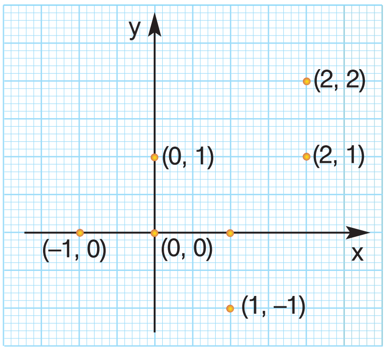
Γενικά

Η εξίσωση x = k με k ≠ 0 παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y′y και τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (k, 0), ενώ η εξίσωση x = 0 παριστάνει τον άξονα y′y

Η εξίσωση αx + βy = γ με α = β = 0

- Η εξίσωση *0x + 0y = 7* δεν παριστάνει ευθεία, αφού κανένα ζεύγος αριθμών (x, y) δεν είναι λύση της (**αδύνατη εξίσωση**).

- Η εξίσωση *0x + 0y = 0* επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y). Για παράδειγμα, τα ζεύγη (–1, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 2), κ.τ.λ. είναι λύσεις της (**αόριστη εξίσωση**). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα η εξίσωση 0x + 0y = 0 δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Εξισώσεις, όπως οι *2x + y = 6*, *0x + 2y = 6*, *3x + 0y = 6*, *0x + 0y = 7*, *0x + 0y = 0*, ονομάζονται **γραμμικές εξισώσεις** με δύο αγνώστους x, y. Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μόνο οι τρεις πρώτες παριστάνουν ευθεία. Στις εξισώσεις αυτές ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των x,y είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Γενικά

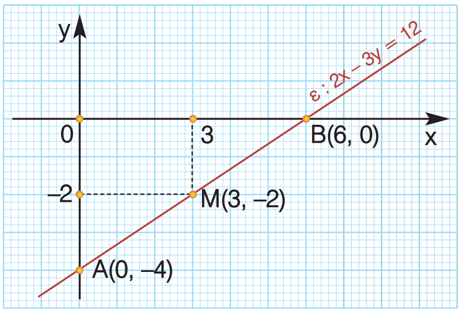
Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής αx + βy = γ και παριστάνει ευθεία όταν α ≠ 0 ή β ≠ 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α) Να σχεδιαστεί η ευθεία ε : $2x - 3y = 12$.**
β) Ένα σημείο Μ έχει τεταγμένη –2. Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο ν' ανήκει στην ευθεία ε;

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ε : $2x - 3y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-3y = 12$, οπότε $y = -4$.
Για $y = 0$ έχουμε $2x = 12$, οπότε $x = 6$.
Άρα η εξίσωση $2x - 3y = 12$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(0, –4) και Β(6, 0).



β) Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε, αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αφού το σημείο Μ έχει τεταγμένη $y = -2$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει $2x - 3(-2) = 12$ ή $2x + 6 = 12$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.

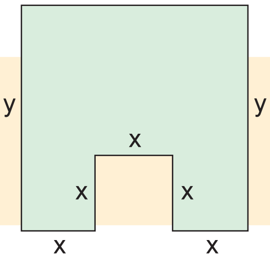
Άρα η τετμημένη του Μ είναι $x = 3$.

2 **Αν η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), τότε να προσδιοριστεί η τιμή του α και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία τής ε με τους άξονες.**

Λύση

Η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση $αx - y = 1$. Άρα έχουμε $2α - 5 = 1$ ή $2α = 6$ ή $α = 3$. Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση $3x - y = 1$.
Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, –1).
Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

3 **Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι 40 m.**
α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα x, y.
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, ποια είναι η μέγιστη τιμή του x;



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος είναι $5x + y + 3x + y$, άρα ισχύει

$$5x + y + 3x + y = 40 \text{ ή } 8x + 2y = 40 \text{ ή } 4x + y = 20 \quad (1).$$

β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, τότε η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 10 και πάνω, δηλαδή ισχύει $y \geq 10$. Από την ισότητα (1) έχουμε $y = 20 - 4x$, οπότε πρέπει $20 - 4x \geq 10$ ή $-4x \geq 10 - 20$ ή $-4x \geq -10$ ή $x \leq 2{,}5$. Άρα η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 2,5 και κάτω, οπότε η μέγιστη τιμή της είναι 2,5 m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη (3, 2), (1, 5), (0, 6), (–3, 10), (–2, 8) είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο (3, –2) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 3x - y = 7$. ☐

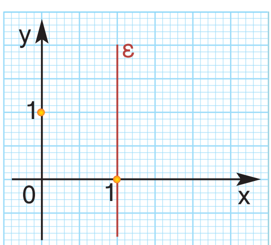
β) Η ευθεία $\varepsilon : 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (–2, 0). ☐

γ) Η ευθεία $\varepsilon : 2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ☐

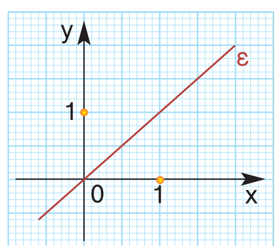
δ) Η ευθεία $\varepsilon : 3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, 3). ☐

3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

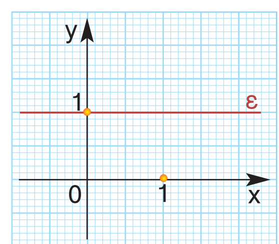
1. $y = 1$ **2.** $x = -1$ **3.** $y = x$ **4.** $x = 1$



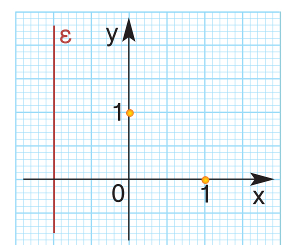
(σχήμα α)



(σχήμα β)



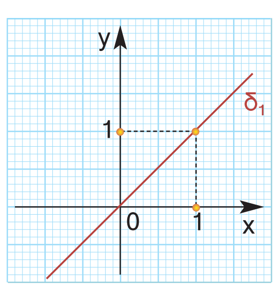
(σχήμα γ)

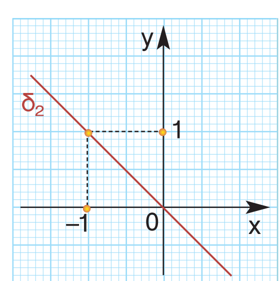


(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

4 Οι ευθείες δ_1, δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





i) Η εξίσωση της δ_1 είναι: **α)** $x = 1$ **β)** $y = 1$ **γ)** $y = x$ **δ)** $y = -x$

ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι: **α)** $x = -1$ **β)** $y = -1$ **γ)** $y = x$ **δ)** $y = -x$

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –3) και είναι παράλληλη στον άξονα x′x έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ **β)** $x = 4$ **γ)** $x = -3$ **δ)** $y = -3$ **ε)** $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –2) και είναι παράλληλη στον άξονα y′y έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ **β)** $x = 4$ **γ)** $x = -2$ **δ)** $y = -2$ **ε)** $4x - 2y = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$ β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10$ γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20$
Τι παρατηρείτε;

2 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 2y = 8 - 2\lambda$.
α) Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

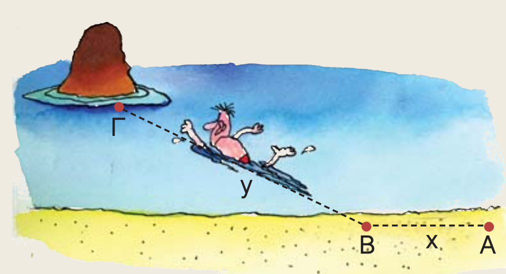
3 Αν η ευθεία $\varepsilon : 4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, τότε:
α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

4 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x = -4$, $\varepsilon_2 : 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο;
$\zeta_1 : 2x - y = 6$, $\zeta_2 : 3x + y = 10$ και $\zeta_3 : -5x + 3y = 16$

5 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
$x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

6 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
α) παράλληλη στον άξονα $x'x$ β) παράλληλη στον άξονα $y'y$.
Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύμπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:



α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x, y.
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύμπησε;

8 Σ' ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x, y. Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατό να έχει ο ξενώνας.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

✔ *Μαθαίνω τι λέγεται γραμμικό σύστημα και πώς επιλύεται γραφικά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.

2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y,

π.χ. $x + y = 5$ και $2x + y = 8$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y**.

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών (3, 2) επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, αφού $\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος (3, 2) είναι **λύση** του συστήματος.

Γενικά

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y; Δηλαδή πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζεύγος (x, y) που να είναι λύση του;

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Σύστημα με μοναδική λύση

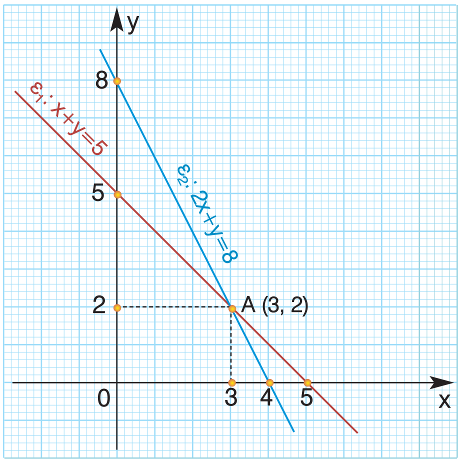
Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος π.χ. του $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

$\varepsilon_1 : \; x + y = 5$ και

$\varepsilon_2 : 2x + y = 8,$

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα **τέμνονται** στο σημείο Α. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (3, 2) του **κοινού σημείου** Α των ευθειών αυτών.



Επειδή το σημείο Α(3, 2) ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως ε_1, ε_2 δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (3, 2) είναι η **μοναδική** λύση του συστήματος.

Αδύνατο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

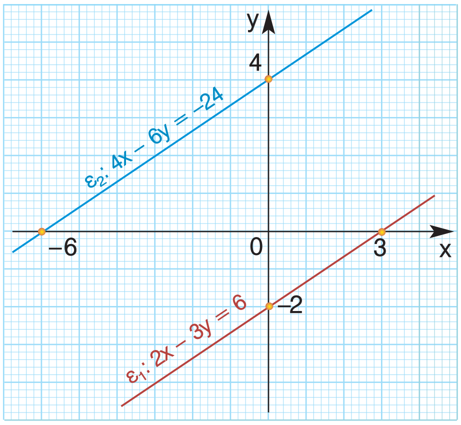
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 2x - 3y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 4x - 6y = -24,$

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα είναι **παράλληλες**. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα **δεν έχει λύση**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

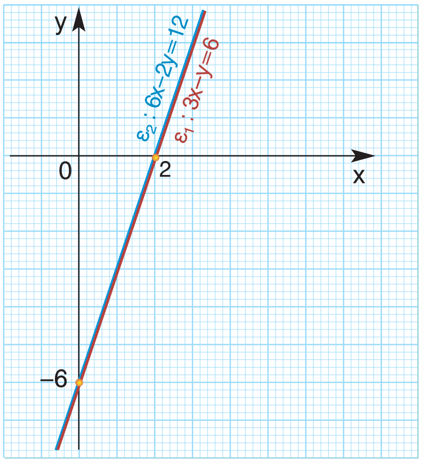
$$\begin{cases} 3x - \;y \;= 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 3x - y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12,$

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα, **συμπίπτουν (ταυτίζονται)**. Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

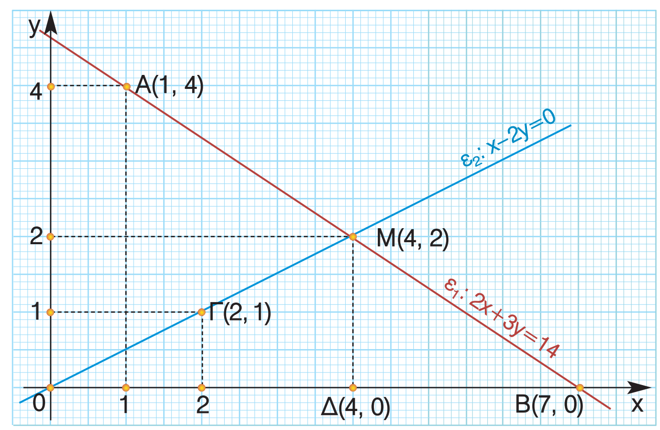


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 14$, $\varepsilon_2 : x - 2y = 0$ και ο άξονας x′x.

Λύση



α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 14$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 1$ έχουμε $2 + 3y = 14$ ή $3y = 12$, οπότε $y = 4$.
Για $x = 7$ έχουμε $2 \cdot 7 + 3y = 14$ ή $3y = 0$, οπότε $y = 0$.
Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α(1, 4) και Β(7, 0).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2 : x - 2y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-2y = 0$, οπότε $y = 0$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 - 2y = 0$ ή $-2y = -2$, οπότε $y = 1$.
Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Γ(2, 1).
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Μ(4, 2), οπότε το σύστημα (Σ) έχει μία λύση την $(x, y) = (4, 2)$.

β) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 και ο άξονας x′x είναι το ΟΜΒ, το οποίο έχει βάση ΟΒ = 7 και ύψος ΜΔ = 2.
Άρα το εμβαδόν του είναι $E = \dfrac{7 \cdot 2}{2} = 7$ τετραγωνικές μονάδες.

2 Να σχεδιάσετε τις ευθείες: $\varepsilon_1 : x - y = 0$, $\varepsilon_2 : x + y = 0$, $\varepsilon_3 : -x + y = -3$.
Πόσες λύσεις έχει καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

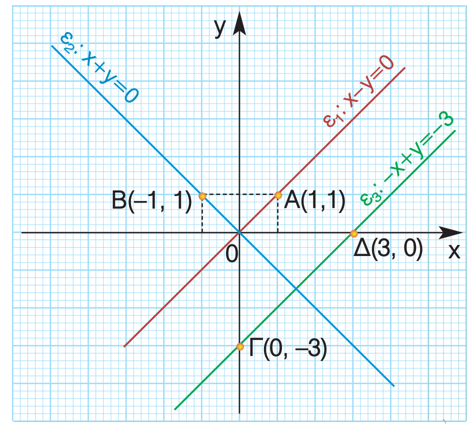
$(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad (\Sigma_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Λύση

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1 : x - y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Α(1, 1).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2 : x + y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = -1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Β(–1, 1).

Σχεδιάζουμε και την ευθεία $ε_3$: $-x + y = -3$. Για $x = 0$ έχουμε $y = -3$ και για $y = 0$ έχουμε $x = 3$. Άρα η ευθεία $ε_3$ διέρχεται από τα σημεία Γ(0, –3) και Δ(3, 0).

Το σύστημα $(Σ_1)$ έχει μοναδική λύση την (0, 0), αφού οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο Ο(0, 0), ενώ το σύστημα $(Σ_2)$ είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

α) Α(–3, 2) β) Β(1, –1) γ) Γ(1, –4) δ) Δ(2, –3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

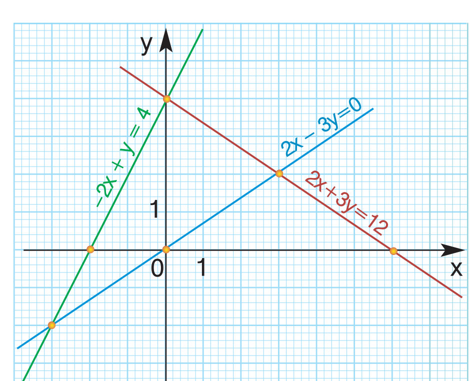
Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται.	**1.** Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι παράλληλες.	**2.** Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ συμπίπτουν.	**3.** Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

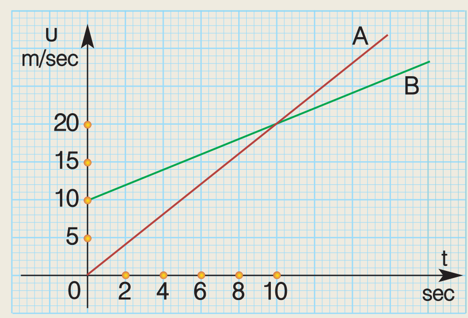
2 Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

3 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε:

α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;



4 Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες:

– Να πληρώνει 20 € για καθε αγώνα που παρακολουθεί.
– Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €.
– Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί.

Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση παριστάνεται με σημεία μιας από τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$.

α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μια από τις τρεις ευθείες.

β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ένας φίλαθλος, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση;

γ) Αν ο φίλαθλος παρακολούθησε τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα;

δ) Αν παρακολούθησε μόνο 15 αγώνες και δεν είχε επιλέξει την πιο συμφέρουσα περίπτωση, πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση;

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

✔ *Μαθαίνω να λύνω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο:*
α) της αντικατάστασης β) των αντιθέτων συντελεστών

✔ *Μαθαίνω να λύνω προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1 βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.
Η αλγεβρική όμως επίλυσή του, όπως θα δούμε σ' αυτή την παράγραφο, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να **καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο**. Δύο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$
$$20 + 2y = 44$$
$$2y = 44 - 20$$
$$2y = 24 \quad \text{άρα} \quad y = 12$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$
$$x = 8$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8$, $y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$

Για επαλήθευση, αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 8$ και $y = 12$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (8, 12) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 8 + 12 = 20 \\ 8 + 3 \cdot 12 = 44. \end{cases}$

Στην ίδια λύση θα καταλήγαμε και αν λύναμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y.

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ οι συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.

Έτσι έχουμε:

$$3x + 5x = 12 + 4 \text{ ή } 8x = 16, \text{ οπότε } x = 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \text{ ή } 2y = 6 \text{ ή } y = 3.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το –2 και της δεύτερης με το 3, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \text{ ή } \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$\cancel{-6x} - 10y + \cancel{6x} + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22, \text{ οπότε } y = 2$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού $y = 2$, η εξίσωση $3x + 5y = 1$ γράφεται:

$$3x + 5 \cdot 2 = 17 \text{ ή } 3x + 10 = 1$$

$$3x = -9 \text{ ή } x = -3$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -3$, $y = 2$, δηλαδή το ζεύγος

$$(x, y) = (-3, 2)$$

Για επαλήθευση αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -3$ και $y = 2$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (–3, 2) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1 \\ 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 8 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.

Λύση

Αν ω, φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε $\omega + \varphi = 180°$. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και $\omega = 3\varphi + 12°$. Για να βρούμε τις γωνίες ω, φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 180° \\ \omega = 3\varphi + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\varphi + 12° + \varphi = 180° \\ \omega = 3\varphi + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\varphi + \varphi = 180° - 12° \\ \omega = 3\varphi + 12° \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 4\varphi = 168° \\ \omega = 3\varphi + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi = 42° \\ \omega = 3 \cdot 42° + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi = 42° \\ \omega = 138° \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι $\omega = 138°$ και $\varphi = 42°$.

2 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Λύση

Αντικαθιστούμε το $x + 2y$ με 4 στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 4 + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 7 - 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

3 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{2} - \dfrac{x + y}{8} = 1 \\[2mm] \dfrac{2x - 1}{5} + \dfrac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{3x - y}{2} - 8 \cdot \dfrac{x + y}{8} = 8 \cdot 1 \\[2mm] 10 \cdot \dfrac{2x - 1}{5} + 10 \cdot \dfrac{y - 3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4(3x - y) - (x + y) = 8 \\ 2(2x - 1) + 5(y - 3) = 20 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y - 15 = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $11x + 4x = 8 + 37$ ή $15x = 45$ ή $x = 3$.
Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$4 \cdot 3 + 5y = 37 \quad ή \quad 12 + 5y = 37 \quad ή \quad 5y = 25 \quad ή \quad y = 5.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση $x + y = 126$ *(1)*.
Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0,50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση $0,50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$ *(2)*.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ 0,50 \cdot x + 1 \cdot y = 90 \end{cases} \Bigg| \cdot(-2) \qquad ή \qquad \begin{cases} x + y = 126 \\ -x - 2y = -180 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $y - 2y = 126 - 180$ ή $-y = -54$ ή $y = 54$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $y = 54$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$x + 54 = 126 \quad ή \quad x = 126 - 54 \quad ή \quad x = 72.$$

Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

α) $(2, 4)$ **β)** $(7, -1)$ **γ)** $(6, 2)$ **δ)** $(5, 1)$

2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
α) την πρώτη εξίσωση ως προς x; **β)** την πρώτη εξίσωση ως προς y;
γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x; **δ)** τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;

α) $3x = -1$ **β)** $2x = -9$ **γ)** $5x = -10$ **δ)** $5x = 10$

4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} ..... \\ ..... \end{array} \right.$ $\quad$ $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} ..... \\ ..... \end{array} \right.$

5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

α) $\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$(Σ_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\quad$ $(Σ_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x - y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

2 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

3 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{4} = 3 \\ \dfrac{3x - y}{2} = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} - y = 1 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{2} + \dfrac{2y + 1}{3} = 3 \\ \dfrac{x + 4}{3} - \dfrac{y - 6}{2} = 4 \end{cases}$

4 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x(y + 4) = y(x - 6) - 15 + 3x \\ (x - 1)(x + 2y) = (x + y)^2 - y(y + 1) \end{cases}$

5 Να λύσετε τα συστήματα:

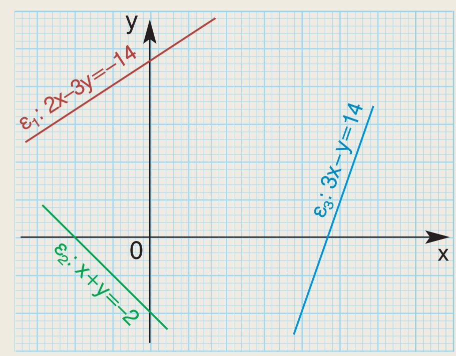
α) $\begin{cases} 1{,}3α - 0{,}8β = 2{,}1 \\ 0{,}9α + 0{,}4β = 0{,}5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{ω}{4} - 0{,}2φ = 1{,}5 \\ 3ω + 1{,}4φ = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2{,}5x + 3{,}2y = -1{,}8 \\ 1{,}6x - 2{,}4y = -5{,}6 \end{cases}$

6 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega} - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-6}{\omega} + \dfrac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$

7 Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 5y = 10$ και $\varepsilon_2 : x - y = 1$.

8 Οι ευθείες:
$\varepsilon_1 : 2x - 3y = -14$
$\varepsilon_2 : x + y = -2$
$\varepsilon_3 : 3x - y = 14$
τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης. Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους;



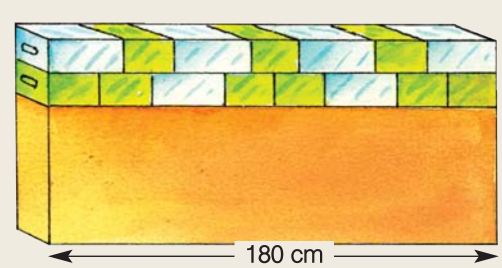
9 Αν $3 + 3 + 3 + ... + 3 + 5 + 5 + 5 + ... + 5 = 410$ και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

10 Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α, β.

11 Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(–3, –2). Να βρείτε τις τιμές των α, β.

12 Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς –1 και 3.

13 Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



14 Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και 5 κιλών. Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος.

15 Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

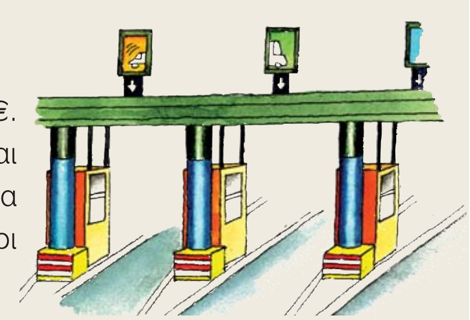
16 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα του απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

17 Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά ένας σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

18 Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

19 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $υ = υ_0 - αt$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;

20 Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.



21 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί τού αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$, όπου k πραγματικός αριθμός.

2 Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2 : x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο Α(2, 1), να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ.

3 Αν τα συστήματα $(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$, και $(\Sigma_2): \begin{cases} 2x + \alpha y = \beta \\ 3x - \beta y = \alpha \end{cases}$
έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς α, β.

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y όταν:
α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$ **β)** $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

5 Να λύσετε τα συστήματα:
α) $\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} (3x - 4y)(x + 2y) = 8 \\ \dfrac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$

6 Να βρείτε δύο αριθμούς, που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, τότε θα προκύψει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15.

7 Αν η εξίσωση $(2\lambda - \kappa - 3)x = \kappa - \lambda + 1$ είναι αόριστη, να βρείτε τους αριθμούς κ, λ.

8 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm. Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά 72π cm^2, να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

9 Να βρείτε τις ηλικίες δύο αδελφών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 5 χρόνια, ενώ μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα έχουν λόγο $\frac{4}{3}$.

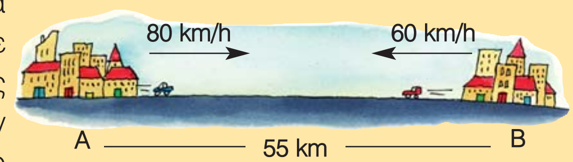
10 Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α′ θέσης κοστίζει 18 € και της Β′ θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

11 Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, τότε θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος.

12 Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός;

13 Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

14 Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



15 Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

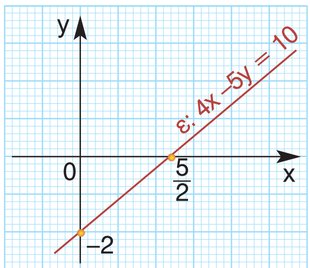
16 Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ' αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.

17 Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω, τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1. Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2.

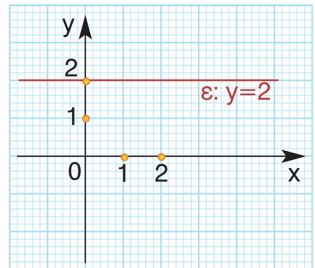
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

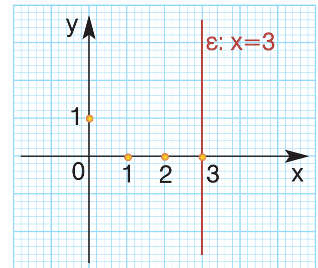
- **Γραμμική** εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$, π.χ. $3x + 2y = 7$.
- **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
  Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (1, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.
- Η γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία ε, αν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.



Αν α≠0 και β≠0, τότε η γραμμική εξίσωση αx+βy=γ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.



Αν α=0, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής y=κ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x ή τον άξονα x′x.



Αν β=0, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής x=κ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y ή τον άξονα y′y.

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο Μ(3, 4) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : \alpha x - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot \alpha - 4 = 0$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο Μ(0, –2) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

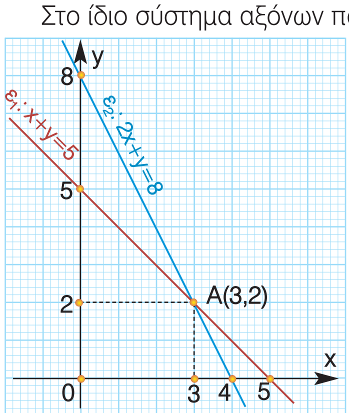
- **Λύση** του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (2, –1) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}, \quad \text{αφού} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$$

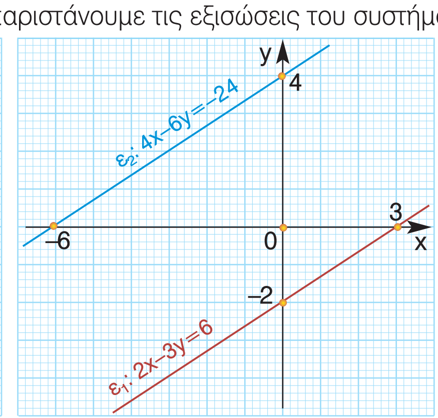
- Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

α) Γραφικά

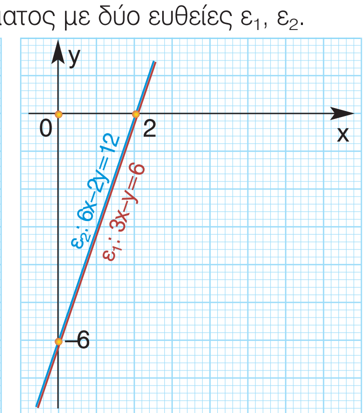
Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.



Αν οι ε_1, ε_2 **τέμνονται** σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους. Π.χ. το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την (x, y) = (3, 2).



Αν οι ε_1, ε_2 είναι **παράλληλες** τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



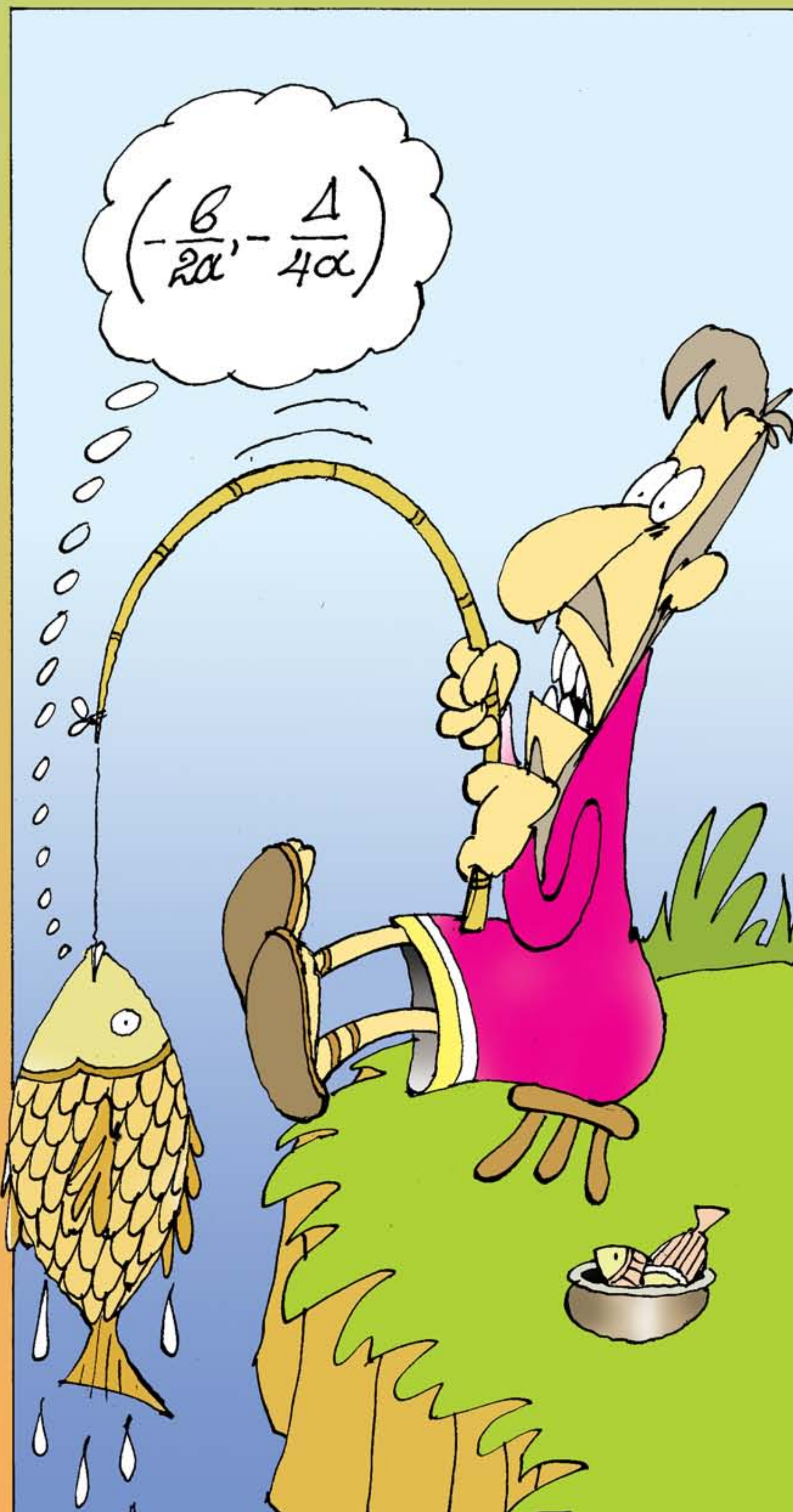
Αν οι ε_1, ε_2 **ταυτίζονται**, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

β) Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντιθέτων συντελεστών προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους του συστήματος και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

- ✔ *Θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.*
- ✔ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α \neq 0$.*
- ✔ *Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = αx^2$ από τη γραφική της παράσταση.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
- Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...
- Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι y = ...
- Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι y = ...

2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;

3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$

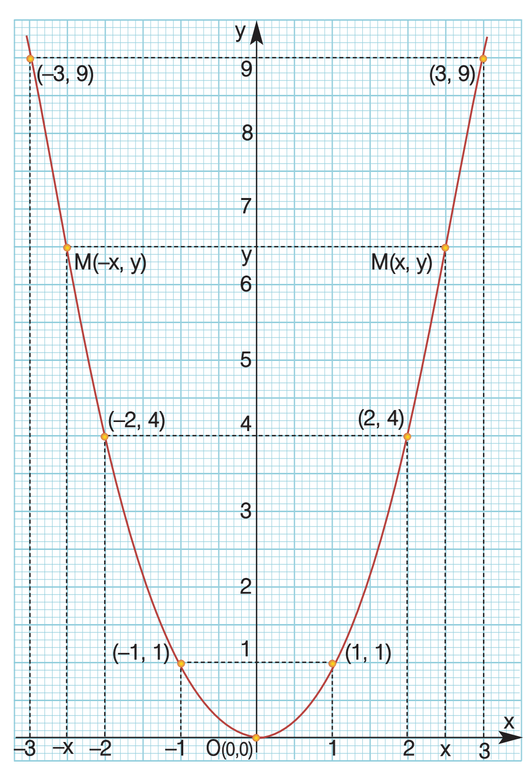
Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ' ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

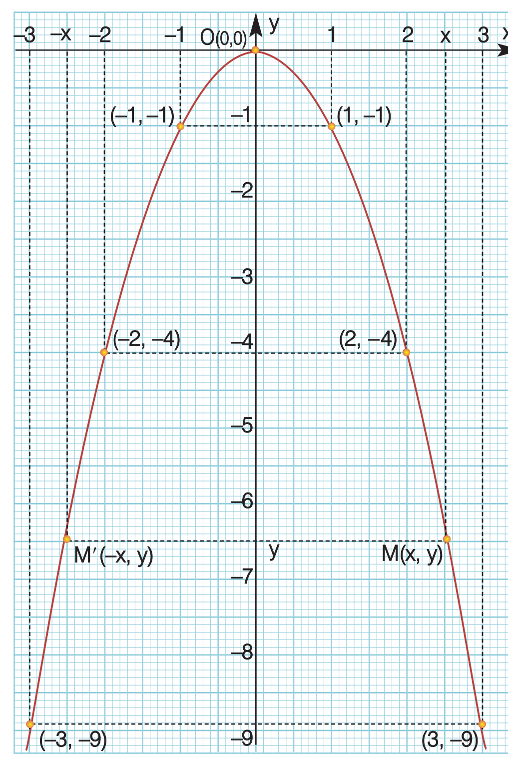
– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x′x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.
– Η συνάρτηση $y = x^2$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
– Για $x = -3$ ή $x = 3$ έχουμε $y = 9$ και τα σημεία (–3, 9) και (3, 9) της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y. Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y′y.

Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$, η οποία είναι επίσης μια παραβολή.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x′x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.
– Η συνάρτηση $y = -x^2$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
– Σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = -x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y′y.

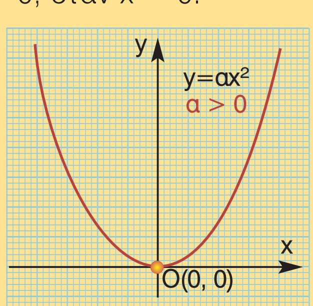


Γενικά

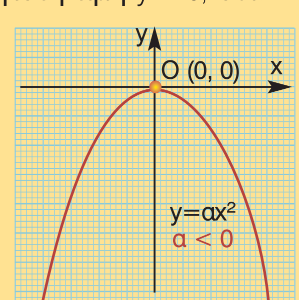
Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$.

- Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.

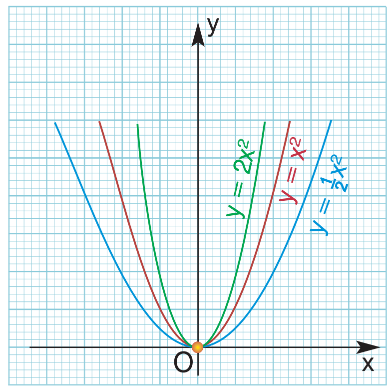
- Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x′x και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

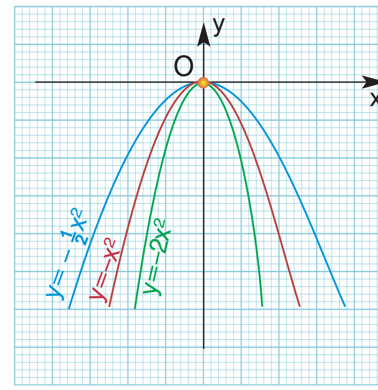


- Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x′x και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

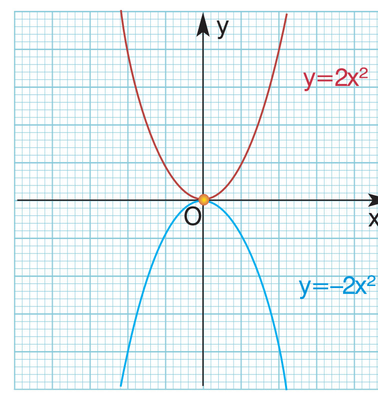


Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = αx^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α. Παρατηρούμε ότι:





α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = αx^2$ ως προς τον άξονα x′x, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμά» της.
Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».



β) Αν σχεδιάσουμε τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = –2x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, τότε παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x′x.

Γενικά:
Οι παραβολές $y = αx^2$ και $y = –αx^2$ είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x′x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η παραβολή $y = αx^2$ να διέρχεται από το σημείο Α (–1, 3).**

Λύση

Για να διέρχεται η παραβολή $y = αx^2$ από το σημείο Α(–1, 3), πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = αx^2$.
Άρα, για $x = –1$ και $y = 3$, έχουμε $3 = α\,(–1)^2$, οπότε $α = 3$.

2 **Να σχεδιαστεί η παραβολή $y = –2x^2$ όταν $–2 \le x \le 2$ και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή y. Ποια σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη $-\dfrac{9}{2}$;**

Λύση

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = –2x^2$.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–2	0	–2	–8

Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του x, από το –2 έως και το 2 ($-2 \leq x \leq 2$) οι αντίστοιχες τιμές του y είναι από το –8 έως και το 0 ($-8 \leq y \leq 0$).

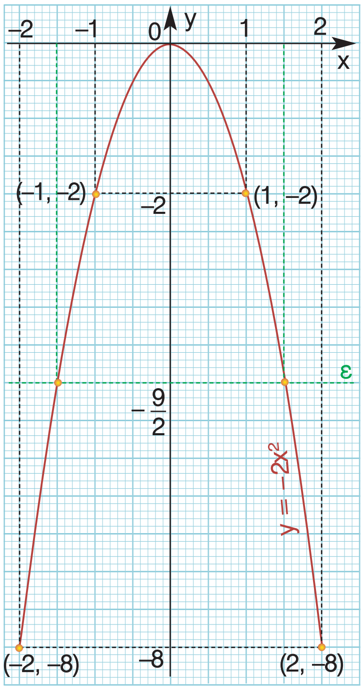
Άρα, η μέγιστη τιμή του y είναι το 0, όταν $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή του y είναι το –8, όταν $x = -2$ ή $x = 2$.

Για $y = -\frac{9}{2}$ έχουμε:

$$-\frac{9}{2} = -2x^2 \text{ ή } x^2 = \frac{9}{4}, \text{ οπότε } x = \pm\frac{3}{2}.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι τα κοινά σημεία της ευθείας $ε : y = -\frac{9}{2}$ και της παραβολής $y = -2x^2$.



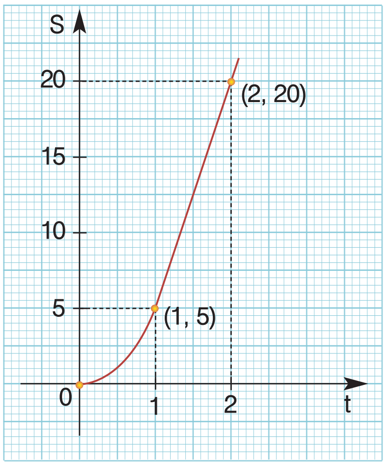
3 Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S, που δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2} gt^2$ ($g \approx 10 m/sec^2$). Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαστήματος – χρόνου.

Λύση

Το διάστημα S για $g = 10\ m/sec^2$ δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5t^2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S = 5t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο O(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία (1, 5), (2, 20) κ.τ.λ.

Ο χρόνος όμως δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε το διάγραμμα του διαστήματος – χρόνου είναι το τμήμα της προηγούμενης παραβολής που βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή $y = -2x^2$;

α) Α(–1, 2) **β)** Β(2, –8) **γ)** $Γ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **δ)** Δ(–2, 8)

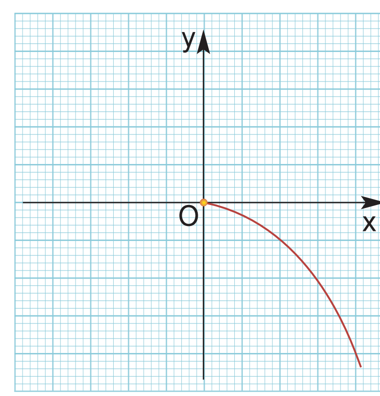
2 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;
α) $y = -4x^2$ β) $y = 4x^2$ γ) $y = (-4x)^2$ δ) $y = -(4x)^2$.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η παραβολή $y = 6x^2$ έχει κορυφή το σημείο Ο(0, 0). ☐
β) Ο άξονας x′x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = x^2$. ☐
γ) Οι παραβολές $y = 8x^2$ και $y = -8x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y′y. ☐
δ) Η συνάρτηση $y = 3x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = 0$. ☐
ε) Η συνάρτηση $y = -2x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή την $y = 0$. ☐
στ) Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(–1, 2), τότε θα διέρχεται και από το σημείο Λ(1, 2). ☐

4 Στο διπλανό σύστημα αξόνων έχουμε σχεδιάσει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -\frac{1}{4}x^2$.

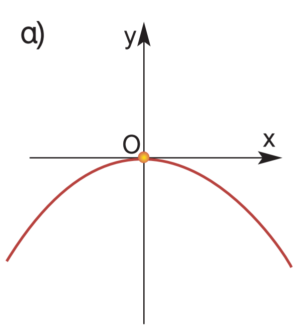
α) Να ολοκληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{4}x^2$.

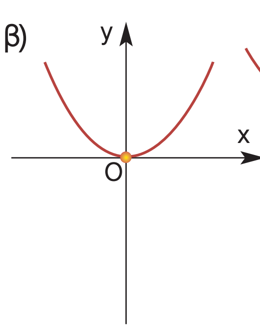


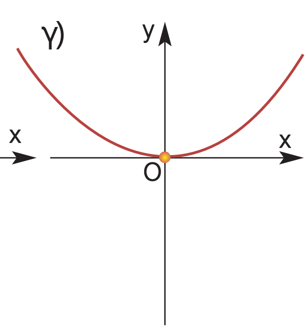
5 Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(2, –4), τότε:
α) $α = 2$ β) $α = -1$ γ) $α = -4$ δ) $α = \frac{1}{8}$

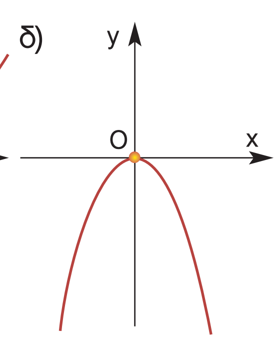
6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ 2) $y = -3x^2$ 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$ 4) $y = x^2$

α)


β)


γ)


δ)


α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

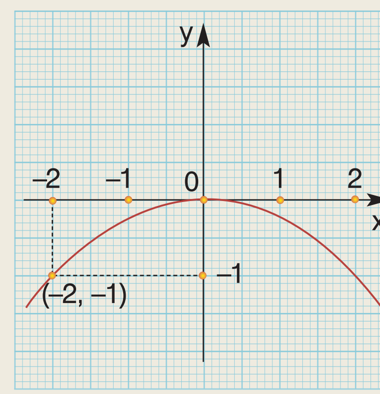
1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = 2x^2$ β) $y = -2x^2$ γ) $y = -\frac{3}{4}x^2$ δ) $y = \frac{2}{3}x^2$

2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α) $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ και $y = 3x^2$ β) $y = \frac{3}{2}x^2$ και $y = -\frac{3}{2}x^2$

3 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.
Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x΄x και να γράψετε την εξίσωσή της.



4 Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -4x^2$ που έχουν τεταγμένη -9.

5 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η παραβολή $y = (\lambda + 2)x^2$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6 Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{\lambda}x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, \lambda)$, να βρείτε την τιμή του αριθμού λ.

7 Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ και έχει μάζα m δίνεται από τον τύπο $E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$.

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - ενέργειας για τρία σώματα που έχουν μάζες 1, 2 και 4 αντιστοίχως.

β) Αν τα σώματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια $E_K = 2$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

γ) Αν τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα $\upsilon = \frac{3}{2}$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε, ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια.

4.2 Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

✔ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 – 4x + 3$ και σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη του πίνακα:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y							

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την παραβολή $y = x^2$.

3. Να αποτυπώσετε την παραβολή $y = x^2$ σ' ένα διαφανές χαρτί και να το μετακινήσετε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο (2, –1) και ο άξονας συμμετρίας της να συμπέσει με την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.
Είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 – 4x + 3$ παραβολή;

Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = –x^2$, που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και οι συναρτήσεις $y = 3x^2 – 1$, $y = –2x^2 + 8x$, $y = x^2 – 4x + 3$ κ.τ.λ., ονομάζονται τετραγωνικές συναρτήσεις.

Γενικά

Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

Αν έχουμε μία τετραγωνική συνάρτηση, όπως την $y = x^2 – 4x + 3$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$, την αποτυπώνουμε σ' ένα διαφανές χαρτί και τη μετακινούμε οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Διαπιστώνουμε ότι η παραβολή αυτή συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 – 4x + 3$.